Leçon 155 : Exponentielle de matrices Applications.

Références : Rombaldi, Caldero Nouvelles histoires - - . Tome I Edition 1.
Gourdon (pour Dunford), Berthelin (équa diff)

I - Exponentielle matricielle

1) Généralités sur les séries matricielles

2) Définitions et premières propriétés

3) Calcul pratique de l'exponentielle

II - Etude de la fonction exponentielle

1) Régularité

2) Injectivité / Surjectivité

3) Quelques restrictions remarquables

III - Application aux résolutions de systèmes différentiels

DEV 1 : Surjectivité de l'exponentielle

DEV 2 : Homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Leçon 155 : Exponentielle de matrices. Applications

Dans cette leçon, le corps K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Exponentielle matricielle

1) Généralités sur les séries matricielles [ROM] chap. V p. 654 + chap. expo matricielle

DEF 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$

LEMME 2 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale i.e $AA^* = A^*A$, alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.

THM 3 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$

LEMME 4 : Soit $\delta > 0$, on note $D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \delta & \\ (0) & & \delta^{n-1} \end{pmatrix}$, on a alors pour $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$D_\delta^{-1} A D_\delta = (\delta^{j-i} a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$

LEMME 5 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une matrice $P_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T_\varepsilon = P_\varepsilon^{-1} A P_\varepsilon$ soit triangulaire supérieure avec $T_\varepsilon = (t_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, $\max\limits_{1 \le i \le n-1} \sum\limits_{j=i+1} |t_{i,j}| < \varepsilon$

THM 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle, on a $\rho(A) \le \|A\|$, l'inégalité pouvant être stricte.

2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle induite par une norme vectorielle telle que $\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$.

3) $\rho(A) = \inf\limits_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}} \|A\|$ où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des normes matricielles induites par une norme vectorielle.

PROP 7 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\rho(A^k) = \rho(A)^k$

- Pour toute norme d'algèbre $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \le \|A\|$.

THM 8 : Soit $\sum a_k z^k$ une série entière à coefficients réels ou complexes de rayon de convergence $R > 0$.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\rho(A) < R$, alors $\sum a_k A^k$ converge normalement.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\rho(A) \ge R$, alors $\sum a_k A^k$ diverge.

Si elle existe, on note $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$

THM 9 : Avec les notations précédentes, $f(A)$ est un polynôme en A.

THM 10 : Soient $\sum a_k z^k$ une série entière à coefficients réels ou complexes de rayon de convergence $R > 0$, f sa somme et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si $\rho(A) = 0$, la fonction $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si $0 < \rho(A) < R$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{R}{\rho(A)} ; \frac{R}{\rho(A)}\right[$. Dans tous les cas, sa dérivée est $\varphi'(t) = A f'(tA)$ où $f'(z) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$

2) Définitions et premières propriétés [ROM]

PROP 11 : La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$. Donc $\sum \frac{1}{k!} A^k$ est convergente pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Sa somme est appelée exponentielle de A et on note $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

THM 12 : La fonction exp est continue de $\mathcal{M}_n(K)$ dans $\mathcal{M}_n(K)$. A METTRE DANS II – 1)

PROP 13 : Si A est nilpotente d'indice $q \ge 1$, on a alors $e^A = \sum\limits_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} A^k$, en particulier $e^0 = I_n$.

PROP 14 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $e^A \in K[A]$ donc commute avec A.

PROP 15 : Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $e^A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

PROP 16 : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $B = P^{-1}AP$, on a $e^B = P^{-1} e^A P$.

PROP 17 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$ et e^A est inversible

PROP 18 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{tA}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\varphi' : t \mapsto A e^{tA} = e^{tA} A$. Idem II – 1

THM 19 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$, e^A est inversible d'inverse e^{-A}.

THM 20 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Les matrices A et B commutent si et seulement si on a $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

REM 21 : Pour avoir $e^{A+B} = e^A e^B$, la commutativité n'est pas superflue : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e^{A+B} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Calcul pratique de l'exponentielle [ROT] [GOU]

THM 22 (Lemme des noyaux) : Soient $(P_j)_{j\in[\![1;p]\!]}$ une famille de $p\geq 2$ polynômes deux à deux premiers entre eux dans $K[X]\setminus\{0\}$ et $P=\prod_{k=1}^{p} P_k$. On a $\ker(P(u))=\bigoplus_{k=1}^{p} \ker(P_k(u))$.

PROP 23 : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $P\in K[X]$, $P=\beta M_1^{\alpha_1}\cdots M_s^{\alpha_s}$ tel que $P(u)=0$. Pour tout $i\in[\![1;s]\!]$, $N_i=\ker(M_i^{\alpha_i}(u))$. La projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en u.

THM 24 : (Décomposition de Dunford) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur K. Il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes tel que :

(i) d est diagonalisable, n est nilpotente

(ii) $u=d+n$, $d\circ n=n\circ d$

De plus, d et n sont des polynômes en u.

REM 25 : On peut remplacer $u\in\mathcal{L}(E)$ par $A\in\mathcal{M}_n(K)$.

THM 25 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(K)$, χ_A scindé sur K, $A=D+N$ sa décomposition de Dunford. Alors celle de $e^A=e^De^N$ est donnée par $e^A=e^D+e^D(e^N-I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N-I_n)$ nilpotente.

COR 26 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(K)$ telle que χ_A soit scindé sur K. Une telle matrice est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

APP 27. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $e^A=I_n \iff A$ est diagonalisable et $Sp(A)\subset 2i\pi\mathbb{Z}$

EX 28 : Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

On a $A=aI_3+bN+cN^2$ d'où $e^A=e^{aI_3}e^{bN+cN^2}$

Donc $e^A=e^a\begin{pmatrix} 1 & b & c+\frac{b^2}{2}\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

II - Étude de la fonction exponentielle

1) Régularité → Continuité [ROT]

THM 29 : exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(K)$ avec pour tout $X,H\in\mathcal{M}_n(K)$:

$$d(\exp)(X)(H)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{\substack{0\leq i,j\leq k-1\\ i+j=k-1}} X^iHX^j\Big)$$

THM 30 : exp réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur $\mathcal{M}_n(K)$ dans un voisinage de I_n dans $GL_n(K)$.

2) Injectivité / Surjectivité [CAL] [ROT]

REM 31 : $\exp:\mathcal{M}_n(K)\to GL_n(K)$ n'est pas injective :

$\exp(2ik\pi)=\exp(0)=1$ (pour $K=\mathbb{C}$)

$\exp\begin{pmatrix} 0 & -2k\pi\\ 2k\pi & 0\end{pmatrix}=I_2$ $(k\in\mathbb{Z})$ (pour $K=\mathbb{R}$)

REM 32 : $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\notin\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

[CAL]

DEF 33 : On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unipotentes (telles que $A-I_n$ est nilpotente)

Pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A)<1$, on définit le logarithme matriciel de A par :

$$\ln(I_n+A)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A^k$$

LEMME 34 : Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A)<1$, on a $\exp(\ln(I_n+A))=I_n+A$

LEMME 35 : Pour tout $A\in\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, on a $e^A\in\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $\ln(e^{tA})=tA$

THM 36 : L'exponentielle matricielle réalise une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ d'inverse le logarithme matriciel.

COR 37 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, pour tout $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^X = \lambda I_n + A$.

Ex rapport du Jury

EX 38 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas un carré dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc n'est pas dans $\exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

PROP 38 : Soit $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Si B est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$. Alors $B \in e^{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

DEV 1

LEMME 39 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $Q(A)$ soit diagonalisable tel que $Q(A)$ soit diagonalisable et $\exp(Q(A)) = A$.

THM 40 : Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(A)) = A$, on a donc :
$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

COR 41 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

COR 42 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe : $X \in GL_n(\mathbb{C})$ polynomiale en A telle que $X^p = A$.

PROP 43 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 / M \in GL_n(\mathbb{R})\}$. [CAL] 409

3) Quelques restrictions remarquables [ROM] [CAL]

DEF 44 : On définit les sous-ensembles de matrices suivants
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tA = A\}$ les matrices symétriques
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^txAx > 0\}$ les matrices symétriques définies positives
- $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / A^* = A\}$ les matrices hermitiennes
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = I_n\}$ les matrices orthogonales
- $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / M^*M = I_n\}$ les matrices unitaires

PROP 45 : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{P^tP \mid P \in GL_n(\mathbb{R})\}$; $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \{PP^* / P \in GL_n(\mathbb{C})\}$

THM 46 (Décomposition polaire) : La multiplication matricielle induit des homéomorphismes
$\mu_1 : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $(O,S) \longmapsto OS$ et $\mu_2 : \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, $(U,H) \longmapsto UH$

DEV 2

LEMME 47 : $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \rho(A)$ où $|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

THM 48 : L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

THM 49 : L'application $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

COR 50 : On a des homéomorphismes
$GL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

[BERTHI]

III - Application aux résolutions de systèmes différentiels

On se fixe I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $A : I \to \mathcal{M}_N(K)$ et $B : I \to K^N$. Étudions l'équation différentielle linéaire homogène $y' = A(t)y$, $(t,y) \in I \times K^N$
On note $(\mathcal{L}_H)$ l'équation $y' = Ay$ avec $A \in \mathcal{M}_N(K)$

PROP 51 : Les solutions de $(\mathcal{L}_H)$ sont de la forme « $y : t \in I \mapsto e^{tA}C$ » où $C \in K^N$.

COR 52 : Le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \in K^N \end{cases}$ admet une unique solution qui est $y : t \mapsto e^{(t-t_0)A} y_0$.

REM 53 : On essaie souvent de diagonaliser (ou trigonaliser A) pour calculer e^{tA}.

EX 54 : [GRI] Le système différentiel
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t) \end{cases}$$
a pour solutions : $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) = -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$.

[CAL] Décompos° polaire et applicat°